

【理系第 1 問】

a, b を実数とする。座標平面上の放物線

$$C : y = x^2 + ax + b$$

は放物線 $y = -x^2$ と 2 つの共有点を持ち、一方の共有点の x 座標は $-1 < x < 0$ を満たし、他方の共有点の x 座標は $0 < x < 1$ を満たす。

- (1) 点 (a, b) のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ。
- (2) 放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ。

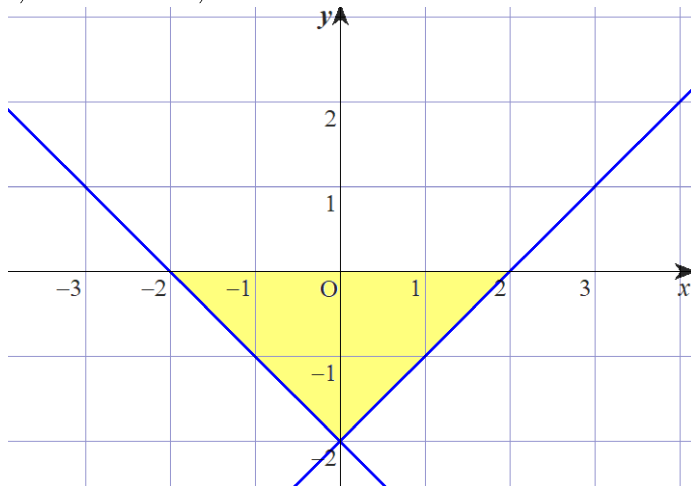
解答例

(1)

$f(x) = x^2 + ax + b$ において

$f(0) < 0, f(-1) > -1, f(1) > -1$, 軸 $-1 < -\frac{a}{2} < 1$

よって $b < 0, b > a - 2, b > -a - 2$



(境界を含まない)

(2)

C を ab 平面上の直線 $l : b = (-x)a + (y - x^2)$ とみて、これが (1) の領域を通る条件から、

(i) $(-x) \leq -1$ のとき、

l の y 切片 $y - x^2$ は、

l が $(-2, 0)$ を通るときの値 $-2x$ より大きく

l が $(2, 0)$ を通るときの値 $2x$ より小さいから

$$-2x < y - x^2 < 2x \iff x^2 - 2x < y < x^2 + 2x$$

(ii) $-1 < (-x) \leq 0$ のとき

l の y 切片 $y - x^2$ は,

l が $(0, -2)$ を通るとき $y - x^2 > -2$ より大きく

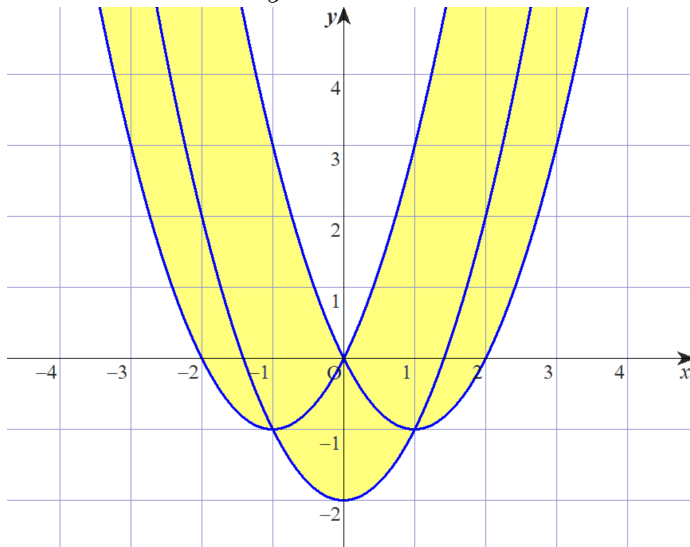
l が $(2, 0)$ を通るとき $y - x^2 < 2x$ より小さいから

$$-2 < y - x^2 < 2x \iff x^2 - 2 < y < x^2 + 2x$$

以下, 対称性から

$$0 < (-x) \leq 1 \text{ のとき } x^2 - 2 < y < x^2 - 2x$$

$$1 < (-x) \text{ のとき } x^2 + 2x < y < x^2 - 2x$$



(境界を含まない)

◆コメント◆

これも頻出典型題なので瞬間的に片づけたいところです。 xy 平面の式を ab 平面の図形とみる解法は、絶対に見たことがある問題のはずですが、ある程度慣れていないと時間がかかってしまいます。一定範囲の中ではありますが、東大はあらゆる受験テクニックを聞いてきます。多少不自然な解法にも、注目しておくことが有効でしょう。