

文系第 4 問

以下の問いに答えよ。

- (1) 正の奇数 K, L と正の整数 A, B が $KA = LB$ を満たしているとする。 K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば、 A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しいことを示せ。
- (2) 正の整数 a, b が $a > b$ を満たしているとする。このとき、 $A = {}_{4a+1}C_{4b+1}$, $B = {}_aC_b$ に対して $KA = LB$ となるような正の奇数 K, L が存在することを示せ。
- (3) a, b は (2) の通りとし、さらに $a - b$ が 2 で割り切れるとする。 ${}_{4a+1}C_{4b+1}$ を 4 で割った余りは ${}_aC_b$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ。
- (4) ${}_{2021}C_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ。

解答例

(1)

$$K = 4Q_1 + R \quad (R = 1, 3), \quad L = 4Q_2 + R \quad \text{とおくと}$$

$$KA = LB \quad \text{より} \quad R(A - B) = 4(Q_2B - Q_1A)$$

R は奇数だから、 $A - B$ は 4 の倍数であり、 A, B を 4 で割った余りは互いに等しい。

(2)

$$a - b = k \quad \text{とおいて、} \quad \frac{A}{B} = \frac{(4b + 4k + 1)!k!b!}{(4k)!(4b + 1)!(b + k)!}$$

$k = 1$ のとき

$$\frac{A}{B} = \frac{(4b + 5)(4b + 3)(2b + 1)}{3} \quad \text{は} \quad K = 3, \quad L = (4b + 5)(4b + 3)(2b + 1) \quad \text{とすれば}$$

$$\frac{L}{K} \quad \text{と表される。}$$

$k = i$ のときに成り立つと仮定すると、奇数 L_i, K_i を用いて

$$\frac{A}{B} = \frac{(4b + 4i + 1)!i!b!}{(4i)!(4b + 1)!(b + i)!} = \frac{L_i}{K_i}$$

と表され、すると $k = i + 1$ のとき

$$\frac{A}{B} = \frac{(4b + 4i + 5)(4b + 4i + 3)(2b + 2i + 1)}{(4i + 3)(2i + 1)(4i + 1)} \cdot \frac{L_i}{K_i}$$

よって $\frac{A}{B}$ はやはり奇数の比であらわされる。

以上から任意の自然数 k で題意は成り立つ。

(3)

(2) において $K_1 = 3, L_1 = (4b + 5)(4b + 3)(2b + 1)$ とおく。また、

$$K_{k+1} = (4k + 3)(2k + 1)(4k + 1)K_k$$

$$L_{k+1} = (4b + 4k + 5)(4b + 4k + 3)(2b + 2k + 1)L_k$$

K_1, L_1 はともに 4 で割った余りが 3 である。また、比

$$(4k + 3)(2k + 1)(4k + 1), (4b + 4k + 5)(4b + 4k + 3)(2b + 2k + 1)$$

も 4 で割った余りは 3 である。

このことから、 K_k, L_k は 4 で割った余りが 3, 1, 3, 1... と繰り返していくが、 K_k, L_k を 4 で割った余りは互いに等しい。

よって (1) から A, B を 4 で割った余りは互いに等しい。

(4)

(3) から、

$$2021 = 4 \cdot 505 + 1, 37 = 4 \cdot 9 + 1$$

$$505 = 4 \cdot 51 + 1, 9 = 4 \cdot 2 + 1$$

$${}_{51}C_2 = 1275 = 4 \cdot 318 + 3$$

よって ${}_{2021}C_{37}$ を 4 で割った余りは **3** である。

◆コメント◆

二項係数は状況が見えにくいので、帰納法で手探りするしかないのですが、 $a - b$ が問題文にあるので、同じ帰納法でも、せっかくなので $a - b = k$ に注目してみると、上記のように、少し式が簡単になります。分母分子で偶数が消えること、なんとなく割った余りが反転していくこと、に気が付けば部分点、というところでしょうか。

◆文系数学全体コメント◆

例によって、計算力は必須です。また、やや頭を使う技巧的な解法を要求してきます。こういった、ワンランク上の、しかし無理のない、受験テクニックを収集するのは大変ですが、そのあたりで情報感度が求められるでしょう。