

## 文系第 2 問

$N$  を 5 以上の整数とする。1 以上  $2N$  以下の整数から、相異なる  $N$  個の整数を選ぶ。ただし 1 は必ず選ぶこととする。選んだ数の集合を  $S$  とし、 $S$  に関する以下の条件を考える。

条件 1:  $S$  は連続する 2 個の整数からなる集合を 1 つも含まない。

条件 2:  $S$  は連続する  $N - 2$  個の整数からなる集合を少なくとも 1 つ含む。

ただし、2 以上の整数  $k$  に対して、連続する  $k$  個の整数からなる集合とは、ある整数  $l$  を用いて  $\{l, l+1, \dots, l+k-1\}$  と表される集合を指す。例えば  $\{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$  は連続する 3 個の整数からなる集合  $\{1, 2, 3\}$ ,  $\{7, 8, 9\}$ ,  $\{8, 9, 10\}$  を含む。

- (1) 条件 1 を満たすような選び方は何通りあるか。
- (2) 条件 2 を満たすような選び方は何通りあるか。

## 解答例

- (1)
  - (i)  $2N$  を選ばないとき、奇数のみを選ぶので 1 通り。
  - (ii) (i) から始めて、 $2N - 1$  のかわりに  $2N$  を選ぶ場合が 1 通り、続けて  $2N - 3$  のかわりに  $2N - 2$  を選ぶ場合が 1 通り、同様に続けて、3 のかわりに 4 を選ぶ場合も 1 通り、これらを合わせると  $N - 1$  通り。
 (i)(ii) から、全部で  $N$  通り。
- (2)
  - (i) 1 から連続して  $N - 2$  を選ぶ場合  
残りの  $N + 2$  個から 2 個を選ぶ選び方は  ${}_{N+2}C_2 = \frac{1}{2}(N+2)(N+1)$  通り。
  - (ii)  $N - 2$  連続数に 1 が含まれない場合  
たとえば  $3 \sim N$  が連続している場合、(i) との重複を避けるため 2 以外の  $N$  個から 1 つ選ぶ選び方が  $N$  通り。  
同様に  $k (> 3)$  から始まる  $N - 2$  個の連続数に対しては、 $k - 1$  を除く  $N$  通りがある。  
このような  $k$  は  $N + 1$  通りあるから、全部で  $N(N + 1)$  通り。
 (i)(ii) から  $\frac{1}{2}(N + 1)(3N + 2)$  通り。

◆コメント◆

言葉で説明すれば簡単です。状況を頭に思い描いて、重複なく数えるところに意識を集中しましょう。このところの東大の傾向として、重複を避けて数えることに重点が置かれています。今回は、選ぶ数字を少しずつスライドしていく、ということで重複を避けるタイプです。典型題なので練習しておきたいところです。