

【文系第 1 問】

a を正の実数とする。座標平面上の曲線 C を $y = ax^3 - 2x$ で定める。原点を中心とする半径 1 の円と C の共有点の個数が 6 個であるような a の範囲を求めよ。

【解答例】

C 上の点 $P(t, t^3 - 2t)$ と原点の距離について $OP = a^2t^6 - 4at^4 + 5t^2 = 1$

が異なる 6 個の実数解をもてばいいが、対称性を考えて $t^2 = u (> 0)$ とおき、

$f(u) = a^2u^3 - 4au^2 + 5u - 1 = 0$ が 3 個の正数解をもつ条件を求める。

$f'(u) = (3au - 5)(au - 1)$ より $f(u)$ は $u = \frac{5}{3a}$ で極小値、 $u = \frac{1}{a}$ で極大値をもつ。

従って求める条件は $f\left(\frac{5}{3a}\right) < 0$ かつ $f\left(\frac{1}{a}\right) > 0$

これより $\frac{50}{27} < a < 2$

◆コメント◆

点取り問題なので迅速に済ませたいところです。ショートストーリーなので、答案もコンパクトにまとめて時間を稼ぎましょう。なお、流儀として、増減表は書いたほうがいいです。