理系第６問

複素数 $\alpha,\ \beta, \gamma,\ \delta$ および実数 $a,\ b$ が，次の 3 条件をみたしながら動く。

条件 1: $\alpha,\ \beta, \gamma,\ \delta$ は相異なる。

条件 2: $\alpha,\ \beta, \gamma,\ \delta$ は 4 次方程式 $z^4 - 2z^3 - 2az + b = 0$ の解である。

条件 3: 複素数 $\alpha\beta + \gamma\delta$ の実部は 0 であり，虚部は 0 でない。

(1) $\alpha,\ \beta$、$\gamma,\ \delta$ のうち，ちょうど 2 つが実数であり，残りの 2 つは互いに共役な複素数であることを示せ。

(2) b を a で表せ。

(3) 複素数 $\alpha + \beta$ がとりうる範囲を複素数平面に図示せよ。

(1)

$$z^4 - 2z^3 - 2az + b = 0 \iff \overline{z^4 - 2z^3 - 2az + b = 0} \iff \overline{z}^4 - 2\overline{z}^3 - 2a\overline{z} + b = 0$$

より，虚数が解なら，その共役複素数も解である。また，

$z^4 - 2z^3 - 2az + b = (z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma)(z-\delta)$ と条件 3 より，

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma + \delta = 2 & \cdots ① \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = 0 & \cdots ② \\ \alpha\beta\gamma + \beta\gamma\delta + \gamma\delta\alpha + \delta\alpha\beta = 2a & \cdots ③ \\ \alpha\beta\gamma\delta = b & \cdots ④ \\ \alpha\beta + \gamma\delta = ki\ \ (k \text{ は実数, } k \neq 0) & \cdots ⑤ \end{cases}$$

(i) $(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)$ の中に二組の共役複素数が含まれていると仮定すると

(a) $(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta) = (\alpha,\ \overline{\alpha},\ \gamma,\ \overline{\gamma})$ の形のとき

$\alpha\beta + \gamma\delta$ が実数となり，⑤に反する。

(b) $(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta) = \left(\alpha,\ \beta,\ \overline{\alpha},\ \overline{\beta}\right)$ の形のとき

同様に $\alpha\beta + \gamma\delta$ が実数となり，⑤に反する。

(ii) $(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)$ がすべて実数だと仮定すると

やはり $\alpha\beta + \gamma\delta$ が実数となり，⑤に反する。

(iii) $(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)$ の中に一組だけ共役複素数が含まれ，他は実数だと仮定すると

(a) $\alpha,\ \beta$ が実数で，$(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta) = \left(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \overline{\delta}\right)$ の形のとき

やはり $\alpha\beta + \gamma\delta$ が実数となり，⑤に反する。

(b) そこで，残されたパターンとして，実数 $p,\ q,\ r,\ s$ を用いて $\alpha = p,\ \beta = r + si,\ \gamma = q,\ \delta = r - si\ (s \neq 0)$ とおいてみる。

⑤から，$r(p+q)+s(p-q)i=ki$ なので，$r(p+q)=0$

(i) $p+q=0$ のとき

$\alpha=p,\ \beta=r+si,\ \gamma=-p,\ \delta=r-si$ により $\alpha\beta+\gamma\delta$ が実数となり，⑤に反する。

(ii) $r=0$ のとき

$\alpha=p,\ \beta=si,\ \gamma=q,\ \delta=-si$ とおく。**(※1)**

①より $p+q=2$，②より $s^2+pq=0 \iff pq=-s^2$

よって $p,\ q$ は2次方程式 $t^2-2t-s^2=0$ の解なので，これを解くと

$t=1\pm\sqrt{1+s^2}$

そこで $p=1\pm\sqrt{1+s^2}.\ q=1\mp\sqrt{1+s^2}$(複号同順) として，

$\alpha=1\pm\sqrt{1+s^2},\ \beta=si,\ \gamma=1\mp\sqrt{1+s^2},\ \delta=-si\cdots$⑥**(※2)**

とおくと，⑥と③から，$a=s^2$，⑥と④から $b=-s^4$ となり，①〜⑤に適し，条件1，条件2にも矛盾しない。

以上から，$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ のうち，ちょうど2つが実数であり，残りの2つは互いに共役な複素数である。

(2)

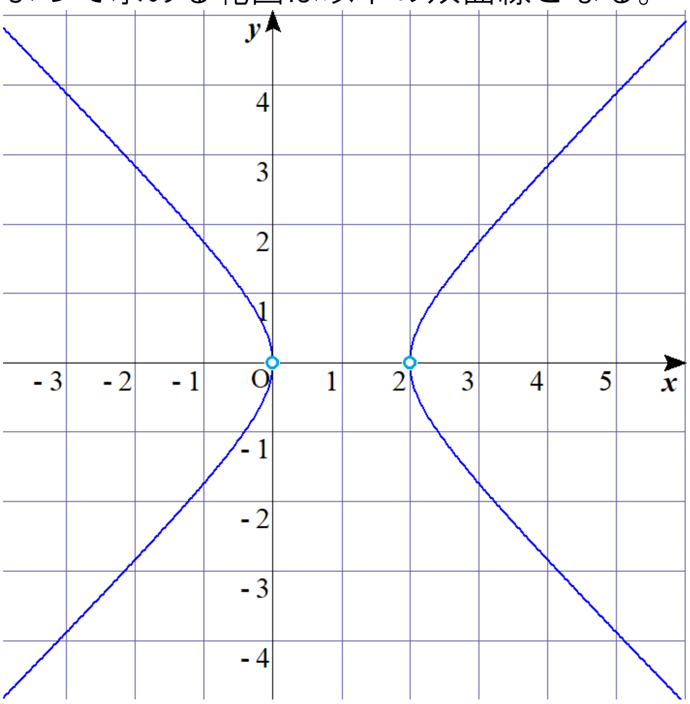
(1) から $\boldsymbol{b=-a^2}$

(3)

$\alpha+\beta=1\pm\sqrt{1+s^2}+si$ において $x=1\pm\sqrt{1+s^2},\ y=s$ とおくと，

$x-1=\pm\sqrt{1+y^2} \iff (x-1)^2=1+y^2 \iff (x-1)^2-y^2=1\ (y\neq 0)$

よって求める範囲は以下の双曲線となる。



◆コメント◆

複素数に関する，純粋な計算問題です。この問題の隠れたポイントは以下の通りです。

(a) (1) では，消去法で，共役複素数が一組，ということはすぐに言えますが，この段階ではまだ①〜⑤のすべての審査には必ずしも通っていません。なので，a, b が求まることまで示したうえで，下線部の記述が必要になります。

(b) 一般性を失わないような文字の置き方に注意します。たとえば **(※ 1)** で $\beta = si$, $\delta = -si$ とおいても，s の符号によって正負の違いを吸収できますから，一般性を失いませんが，**(※ 2)** では，$\alpha = 1 + \sqrt{1+s^2}$, $\gamma = 1 - \sqrt{1+s^2}$ とおくと，一般性を欠くおそれがあります。

(c) 筆記量が膨大であることから，ギリシャ文字を速く正確に書くことがポイントになります。たとえば，ブラックなところでは，高校の授業中に内職をして，しっかりノートに筆記練習をしたかどうか，というようなことが問われます。

◆理系数学全体コメント◆

(a) 例年の傾向に沿った良問揃いです。計算重視ではありますが，易から難へと幅広く出題されていて，きちんと点差が分かれるでしょう。

(b) 筆記量が多いので，時間的に苦しく，高得点は難しいです。しかしどの問題も，概ね順序よく求めていくタイプなので，どこまで解いたかがわかりやすくなっています。こういった場合，部分点がつく可能性が高いです。

(c) 第 1 問，第 2 問，第 4 問，第 6 問 (1)，第 5 問 (1)(2)，あたりを優先的に解くのがいいでしょう。

(d) こまかなところでは，やはり筆記速度と答案作成テクニックが重要になります。さらに，識別しづらい文字を書いていると，自分の字が原因で，計算を間違えてしまいます。「日替わりワンポイントアドバイス」でいつも書いているようなことが，今年も検証された形です。

(e) 進学校では，範囲外の記号や，世界標準がどうとかいった話題が横行していますが，東大入試の傾向はきわめてはっきりしているので，学習範囲を無駄に広げることなく，要領よく合格しましょう。