理系第５問

以下の問いに答えよ。

(1) n を 1 以上の整数とする。x についての方程式

$x^{2n-1}=\cos x$

は，ただ一つの実数解 a_n をもつことを示せ。

(2) (1) で定まる a_n に対し，$\cos a_n > \cos 1$ を示せ。

(3) (1) で定まる数列 a_1，a_2，a_3，$\cdots$，a_n，$\cdots$ に対し，

$a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$，$b=\lim\limits_{n\to\infty} {a_n}^n$，$c=\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{{a_n}^n-b}{a_n-a}$

を求めよ。

(1)

$f(x)=x^{2n-1}$ は単調減少，$g(x)=\sin x$ は単調増加，

$x<-1$ のとき $f(x)<-1\leqq g(x)$，$-1\leqq x$ のとき $f(x)\leqq 0<g(x)$，$1<x$ のとき $g(x)\leqq 1<f(x)$，また $f(0)<g(0)$，$f(1)>g(1)$ である。よって，$x^{2n-1}=\cos x$ は $0<x<1$ にただ一つの解をもち，それ以外に解は存在しない。

(2)

$0\leqq x\leqq 1$ において $g(x)$ は単調減少で，(1) より $a_n<1$ だから $\cos a_n>\cos 1$

(3)

$y=\dfrac{1}{2}$ と $y=f(x)$ の交点の x 座標を c_n とする。$\dfrac{1}{2}=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ なので，$0\leqq x\leqq 1$ では $\cos a_n>\dfrac{1}{2}$ だから $c_n<a_n$

$$f(c_n)={c_n}^{2n-1}=\frac{1}{2}\iff 2n-1=\log_{c_n}\left(\frac{1}{2}\right)\iff \log_2 c_n=\frac{-1}{2n-1}$$

ここで，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-1}{2n-1}=0$ だから $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=1$

$c_n<a_n<1$ より，はさみうちの原理で $\boldsymbol{a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1}\cdots$①

また ${a_n}^{2n-1}=\cos a_n$ なので，${a_n}^n=\sqrt{a_n\cos a_n}$

①より $b=\lim\limits_{n\to\infty}{a_n}^n=\sqrt{\cos 1}$

次に $\dfrac{{a_n}^n-b}{a_n-a}=\dfrac{\sqrt{a_n\cos a_n}-\sqrt{\cos 1}}{a_n-1}$ において，$h(x)=\sqrt{x\cos x}$ とおくと，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_n\cos a_n}-\sqrt{\cos 1}}{a_n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{h(a_n)-h(1)}{a_n-1}=h'(1)$$

$h'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\cos x-x\sin x}{\sqrt{x\cos x}}$ より $\boldsymbol{c=\dfrac{\cos 1-\sin 1}{2\sqrt{\cos(1)}}}$

◆コメント◆

(1) は，グラフから明らかですが，それをあえて不等式で表記するのが数 3 の特徴で

す。このあたりが，数 2B までとは違うわけですが，解析学の入門としての，数 3 のカリキュラム特性をつかんでいるかどうか，というのは重要です。なかなか学校では身につかない，受験のポイントの一つといえるでしょう。