理系第３問

座標空間内に 5 点 A(2, 0, 0), B(0, 2, 0), C(-2, 0, 0), D(0, -2, 0), E(0, 0, -2) を考える。線分 AB の中点 M と線分 AD の中点 N を通り，直線 AE に平行な平面を α とする。さらに，p は $2 < p < 4$ をみたす実数とし，点 P(p, 0, 2) を考える。

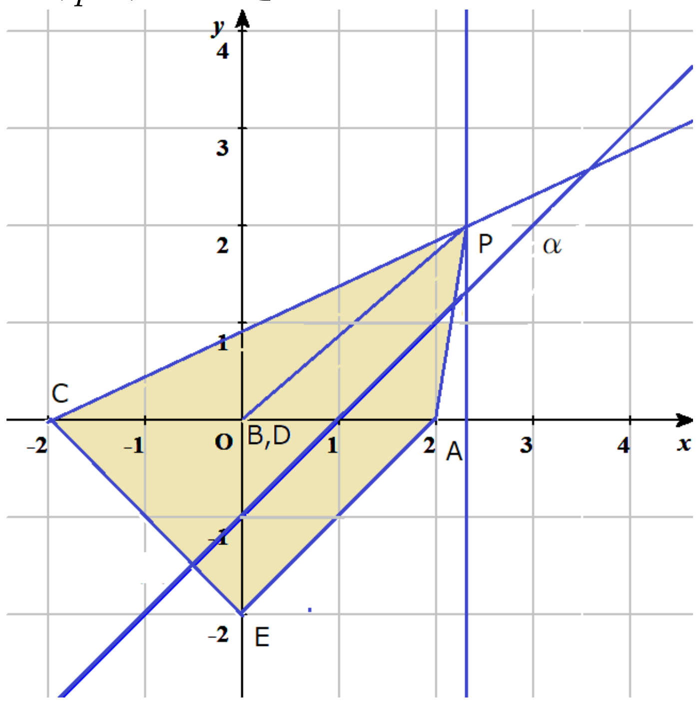
(1) 八面体 PABCDE の平面 $y=0$ による切り口および，平面 α の平面 $y=0$ による切り口を同一平面上に図示せよ。

(2) 八面体 PABCDE の平面 α による切り口が八角形となる p の範囲を求めよ。

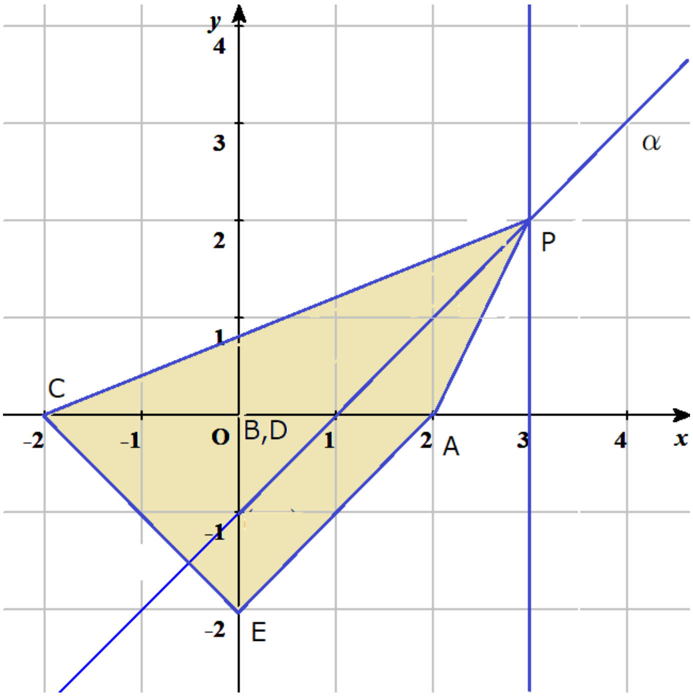
(3) 実数 p が (2) で定まる範囲にあるとする。八面体 PABCDE の平面 α による切り口のうち $y \geqq 0$, $z \geqq 0$ の部分を点 (x, y, z) が動くとき，座標平面上で点 (y, z) が動く範囲の面積を求めよ。

(1)

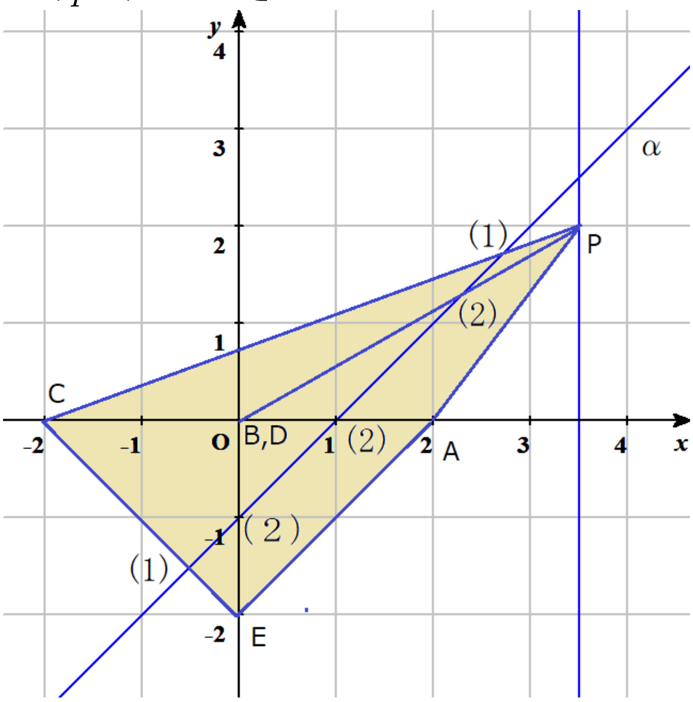
(i) $2 < p < 3$ のとき



(ii) $p = 3$ のとき



(iii) $3 < p < 4$ のとき



(カッコ内の数字は重なって見える交点の数)

(2)

辺 PC が α と交わる条件から $\boldsymbol{3 < p < 4}$

(3)

直線 BP: $\dfrac{x}{p} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z}{2} = t$ と $\alpha : z = x - 1$ の式より $t = \dfrac{1}{p-2}$

よって α との交点 S は $(y,\ z) = \left(2 \cdot \dfrac{p-3}{p-2},\ 2.p-2\right)$

また，直線 CP: $z = \dfrac{2}{p+2}(x+2)\quad (y=0)$ と α の交点 T は $(y,\ z) = \left(0,\ \dfrac{6}{p}\right)$

$\mathrm{M}(y,\ z) = (1,\ 0)$

四角形 OMST の面積を求めて，$\boldsymbol{\dfrac{7p-8}{p\,(p-2)}}$

◆コメント◆

空間図形を想像する力があるといいですが，(1) を解く過程でだいたい状況は見えてくるので，それで突進しても大丈夫です。直線 BP と α の交点を求めるところも定型パターンで無理はありませんが，他の問題を先にやってから分母が $p-2$ の計算が続くと，何となく手が疲れてきます。分数式の計算が連続すると，実は思いのほか労力を消耗するので，差が付きやすいです。だからこそ東大入試の定番になっています。そういうところは，独特の手の動きに慣れていくといいでしょう。