文系第３問

正八角形の頂点を反時計回りに A，B，C，D，E，F，G，H とする。また，投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインがある。2 点 P が最初に点 A にある。次の操作を 10 回繰り返す。

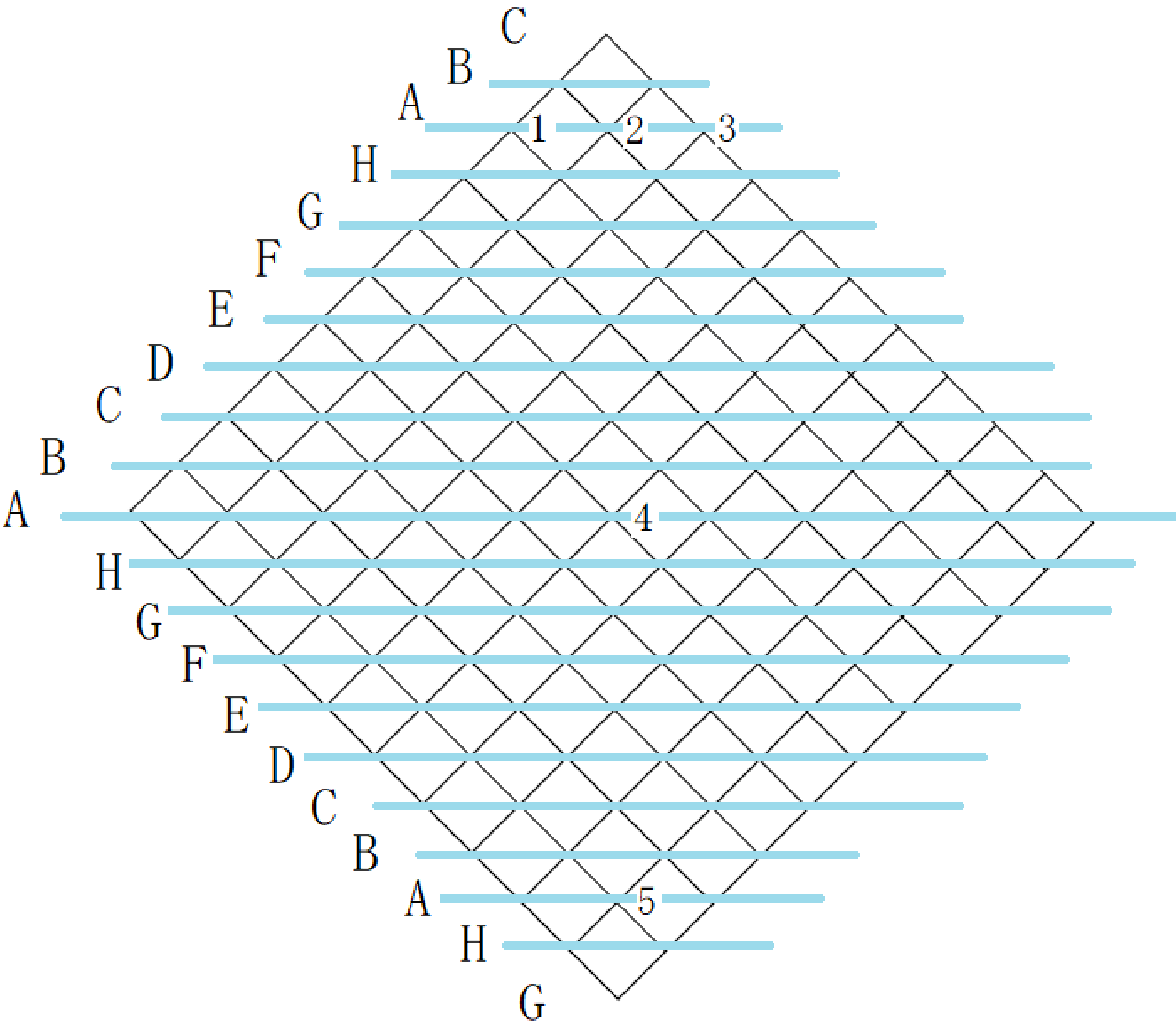
操作:
コインを投げ，表が出れば点 P を反時計回りに隣接する頂点に移動させ，裏が出れば点 P を時計回りに隣接する頂点に移動させる。

例えば，点 P が点 H にある状態で，投げたコインの表が出れば点 A に移動させ，裏が出れば点 G に移動させる。以下の事象を考える。

事象 S:
操作を 10 回行った後に点 P が点 A にある。
事象 T:
1 回目から 10 回目の操作によって，点 P は少なくとも 1 回，点 F に移動する。

(1) 事象 S が起こる確率を求めよ。
(2) 事象 S と事象 T がともに起こる確率を求めよ。

(1)
以下の図で，左端の A から出発して，表が出ると右上に，裏が出ると右下に進むものとする。
A_2 に到達する経路は ${}_{10}\mathrm{C}_1 = 10$ 通り，A_4 に到達する経路は ${}_{10}\mathrm{C}_5 = 252$ 通り，A_5 に到達する経路は ${}_{10}\mathrm{C}_1 = 10$ 通り，計 272 通り。よって求める確率は $272 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10} = \boldsymbol{\dfrac{17}{64}}$



(2)

A_2 に到達する経路はすべて F を通るので 10 通り，A_5 に到達する経路も同じく 10 通り。以下，A_4 に到達する経路を考える。

(i) F_1 ではじめて F に到達する経路：1 通り

(ii) F_3 ではじめて F に到達する経路：$1 \times {}_7C_2 = 21$ 通り

(iii) F_4 ではじめて F に到達する経路：

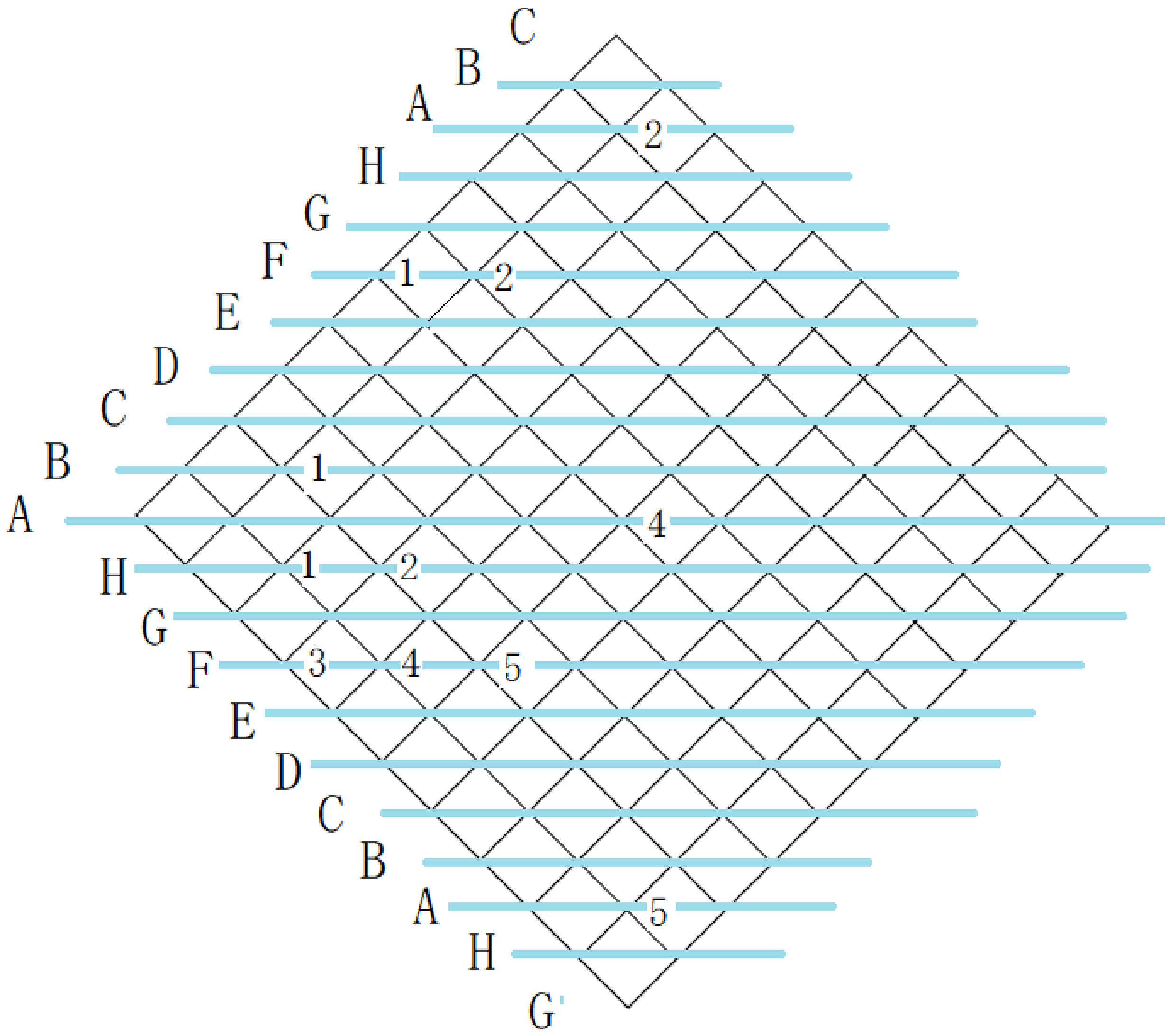
必ず H_1 を通らなければならないので，${}_3C_1 \times 1 \times {}_5C_1 = 15$ 通り

(iv) F_5 ではじめて F に到達する経路

a) H_1 を通る場合：${}_3C_1 \times 2 \times 1 = 6$ 通り

b) H_1 を通らない場合：必ず B_1 を通るから ${}_3C_1 \times 1 \times 1 = 3$ 通り

以上から計 66 通り。よって求める確率は $66 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10} = \mathbf{\dfrac{33}{512}}$



◆コメント◆

(1) だけ先にやって他の問題にいきましょう。(2) で難しいのは F_4, F_5 ルートで，ここは，図を援用しないと間違えやすいです。しかしそれ以外のルートは易しいので，必ず求めて，部分点をとりましょう。