文系第２問

　O を原点とする座標平面において，点 A(2，2) を通り，線分 OA と垂直な直線を l とする。座標平面上を点 P$(p,\ q)$ が次の 2 つの条件をみたしながら動く。

条件 1 $8 \leqq \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} \leqq 17$

条件 2 点 O と直線 l の距離を c とし，点 P$(p,\ q)$ と直線 l の距離を d とするとき $cd \geqq (p-1)^2$

　このとき，P が動く領域を D とする。さらに，x 軸の正の部分と線分 OP のなす角を θ とする。

(1) D を図示し，その面積を求めよ。

(2) $\cos\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

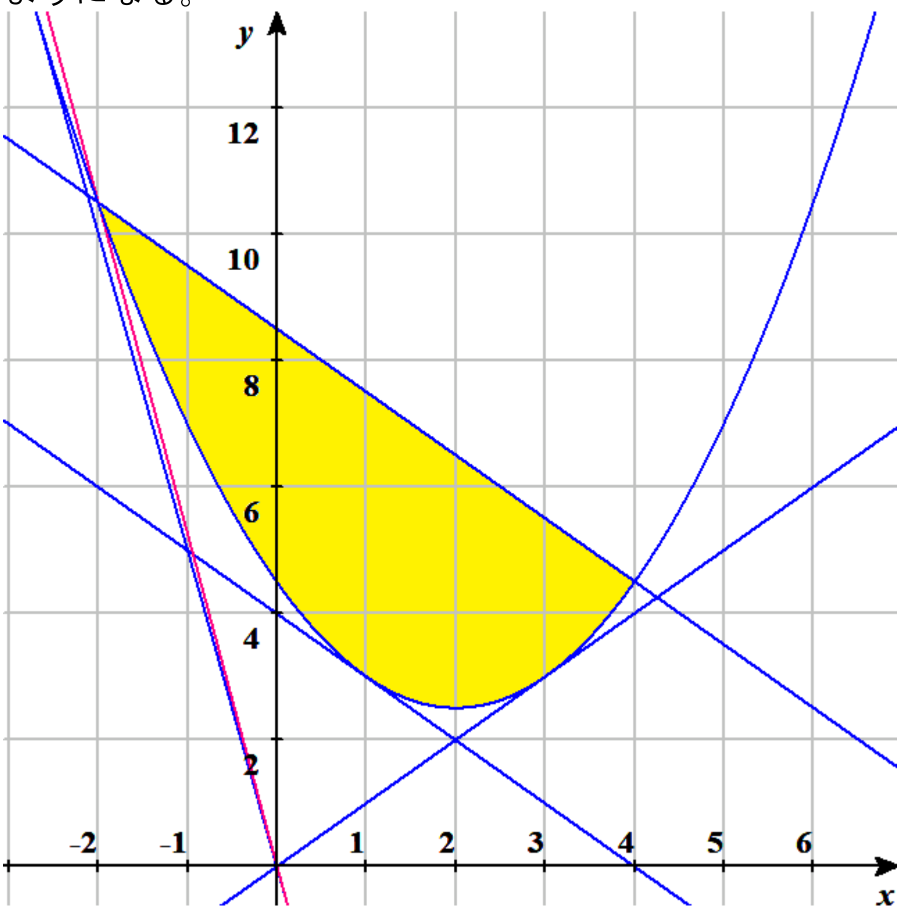
(1)

条件 1 から $4 \leqq p+q \leqq \dfrac{17}{2}$

これを用いると $d = \dfrac{|p+q-4|}{\sqrt{2}} = \dfrac{p+q-4}{\sqrt{2}}$

$c = 2\sqrt{2}$ ∴ 条件 2 は $p^2-4p+9 \leqq 2q \iff q \geqq \dfrac{1}{2}(p-2)^2 + \dfrac{5}{2}$

よって D は $x+y=\dfrac{17}{2} \cdots$ ① と $x^2-4x+9=2y \cdots$ ② で囲まれた領域で，以下のようになる。



面積は $-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-2}^{4}(x-4)(x+2)\,dx=\mathbf{18}$

(2)

放物線②と原点を通る直線 $y=tx$ が接する条件を求める。

両式から y を消去して，$x^2-2(2+t)x+9=0$，この式で $D/4=(t+5)(t-1)=0$ とおいて $t=1,\ -5$

よって $x<0$ で接する接線の傾きは -5

一方 D の左端を通る直線は $y=-\dfrac{21}{4}x$，$-\dfrac{21}{4}<-5$ だから，$\underline{y=-5x\text{は領域}D\text{とは接していない}}$。よって，傾き $-\dfrac{21}{4}$ のとき θ が最大となる。

このとき $\cos\theta=-\dfrac{4}{\sqrt{457}}$

また，$\underline{0<x\text{における接線のほうは領域}D\text{と接していて}}$，このとき $\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

以上から $\boldsymbol{-\dfrac{4}{\sqrt{457}}\leqq\cos\theta\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

◆コメント◆

接点が領域内にあるかどうか判定する，頻出問題です。そのことを，ちゃんと日本語で書きましょう（上の下線部）。頻出問題にどう答えるか，書式を身に着けたかどうかで，スピードが分かれますが，答え自体は，確実に出るでしょう。