理系第６問

点 O を原点とする座標空間内で，一辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かす。また，点 A(1，0，0) に対して，∠AOP を θ とおく。ただし $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(1) 点 Q が (0，0，1) にあるとき，点 P の x 座標がとりうる値の範囲と，θ がとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 点 Q が平面 $x=0$ 上を動くとき，辺 OP が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。

(1) $\mathrm{P}\left(\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ \dfrac{1}{2}\right)$ とおき，φ を 0 から π まで単調に増加させると，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \left(\cos\varphi,\ \sin\varphi,\ \dfrac{1}{2}\right)\cdot(1,\ 0,\ 0) = \cos\varphi \cdots ①$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 1$ だから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = |\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos\theta = \cos\theta \cdots ②$

①②より $\cos\theta = \cos\varphi$，よって，φ に対して θ も単調に増加する。

ゆえに θ のとりうる値の範囲は $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{5\pi}{6}}$

点 P の x 座標がとりうる値の範囲は $\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

(2) (1) のときに △OPQ が z 軸の周りに一回転すると，辺 OP，PQ により円錐面ができる。その円錐面のうち $z \geqq \dfrac{1}{2}$ にあるほうは，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ のときの PQ が $x = \sqrt{3}\,(1-z)$ なので，$x^2+y^2 = 3\,(1-z)^2$ $\left(\dfrac{1}{2} \leqq z \leqq 1\right)$

この円錐面を平面 $x=t$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で切った切り口は双曲線

$y^2 - 3\,(1-z)^2 = -t^2$ $\left(\dfrac{1}{2} \leqq z \leqq 1 - \dfrac{t}{\sqrt{3}}\right)$

この双曲線上で $(t,\ 0,\ 0)$ から最も遠い点を調べる。

いま，$(t,\ 0,\ 0)$ からの距離を $\sqrt{y^2+z^2} = l$ とおくと，③より y^2 を消去して $l^2 = z^2 + 3\,(1-z)^2 - t^2 = 2\left(z - \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{3}{2} - t^2$ なので，l^2 は $z = \dfrac{1}{2}$ のときに最大で，最大値は $1 - t^2$

同様に $z \leqq \dfrac{1}{2}$ にある円錐面は $x^2+y^2 = 3z^2$

これを $x=t$ で切った断面は双曲線

$y^2 - 3z^2 = -t^2$ $\left(\dfrac{t}{\sqrt{3}} \leqq z \leqq \dfrac{1}{2}\right)$

だが，ここでも同様に $y^2+z^2=l^2 \iff y^2=l^2-z^2$ として，$l^2=4z^2-t^2$，これが最小になるのは z^2 が最小となるときで，$z^2=\dfrac{t^2}{3}$，よって l^2 の最小値は $4\cdot\dfrac{t^2}{3}-t^2=\dfrac{t^2}{3}$

以上より，題意の立体を $x=t$ で切った断面積は，

$S\left(t\right)=\pi\left\{\left(1-t^2\right)-\dfrac{t^2}{3}\right\}=\pi\left(1-\dfrac{4t^2}{3}\right)$

求める体積は，$2\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}S(t)dt=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1-\dfrac{4t^2}{3}\right)dt=\boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi}$