理系第５問

k を実数とし，座標平面上で次の 2 つの放物線 C, D の共通接線について考える。

$$C : y = x^2 + k$$
$$D : x = y^2 + k$$

(1) 直線 $y = ax + b$ が共通接線であるとき，a を用いて k と b を表せ。ただし $a \neq -1$ とする。

(2) 傾きが 2 の共通接線が存在するように k の値を定める。このとき，共通接線が 3 本存在することを示し，それらの傾きと y 切片を求めよ。

(1) 放物線の軸と平行な接線は存在しないから，$a \neq 0$ としてよい。

C の式と $y = ax+b$ から $x^2 - ax + (k-b) = 0$, 重解条件から $a^2 - 4k + 4b = 0 \cdots$ ①

D の式と $y = ax + b \iff x = \dfrac{y-b}{a}$ から $ay^2 - y + (b + ak) = 0$，重解条件から $4a^2k + 4ab - 1 = 0 \cdots$ ②

②から $b = \dfrac{1-4a^2k}{4a}$，これを①に代入して，

$$\boldsymbol{k = \frac{a^2 - a + 1}{4a}}, \quad \therefore\ \boldsymbol{b = \frac{(a^2+1)(1-a)}{4a}}$$

(2) $a = 2$ のとき (1) から $k = \dfrac{3}{8}$, $b = -\dfrac{5}{8}$

よって接線の一つは $y = 2x - \dfrac{5}{8}$

もう一つはこれの逆関数で，$y = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{16}$

さらにもう一つは傾き -1 のものなので $y = -x + p$ とすれば,

放物線 $C : y = x^2 + \dfrac{3}{8}$ と接する条件から $p = \dfrac{1}{8}$，接線は $y = -x + \dfrac{1}{8}$

以上より接線は 3 本あって，

$$\begin{cases} \boldsymbol{y = 2x - \frac{5}{8}} & \text{傾き } \boldsymbol{2},\ \boldsymbol{y} \text{ 切片 } \boldsymbol{-\frac{5}{8}} \\ \boldsymbol{y = \frac{1}{2} + \frac{5}{16}} & \text{傾き} \boldsymbol{\frac{1}{2}},\ \boldsymbol{y} \text{ 切片} \boldsymbol{\frac{5}{16}} \\ \boldsymbol{y = -x + \frac{1}{8}} & \text{傾き } \boldsymbol{-1},\ \boldsymbol{y} \text{ 切片} \boldsymbol{\frac{1}{8}} \end{cases}$$