理系第４問

$p=2+\sqrt{5}$ とおき，自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して

$$a_n=p^n+\left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める。以下の問いに答えよ。ただし設問 (1) は結論のみを書けばよい。

(1) $a_1,\ a_2$ の値を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ とする。積 a_1a_2 を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3) a_n は自然数であることを示せ。

(4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

(1) $p=\sqrt{5}+2,\ \dfrac{1}{p}=\sqrt{5}-2$ なので，

$$a_1=\left(\sqrt{5}+2\right)-\left(\sqrt{5}-2\right)=\mathbf{4},\ \ a_2=\left(\sqrt{5}+2\right)^2+\left(\sqrt{5}-2\right)^2=\mathbf{18}$$

(2) $$a_1a_n=\left(p-\frac{1}{p}\right)\left\{p^n+\left(-\frac{1}{p}\right)^n\right\}$$

$$=p^{n+1}-p^{n-1}+\left(-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{p}\right)^n+p\left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

$$=p^{n+1}-p^{n-1}+\left(-\frac{1}{p}\right)^{n+1}-\left(-\frac{1}{p}\right)^{-1}\left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

$$=p^{n+1}-p^{n-1}+\left(-\frac{1}{p}\right)^{n+1}-\left(-\frac{1}{p}\right)^{n-1}$$

$$=\boldsymbol{a_{n+1}-a_{n-1}}$$

(3) (2) より $a_{n+1}=a_1a_n+a_{n-1}\cdots$ ①

ここで，自然数 $k\ (\geqq 2)$ に対して $a_k,\ a_{k-1}$ がともに自然数であると仮定すると，a_1 が自然数なので，①から，a_{k+1} も自然数となる。

$a_1,\ a_2$ が自然数であることはわかっているので，数学的帰納法により，すべての自然数 n で a_n は自然数となる。（証明終）

(4) a_k と $a_{k-1}\ (k\geqq 2)$ が最大公約数 2 をもつと仮定して，$a_k=2\alpha$，$a_{k-1}=2\beta$（$\alpha,\ \beta$ は互いに素）とおく。このとき①より $a_{k+1}=2\,(4\alpha+\beta)$，これと $a_k=2\alpha$ を比べると，$4\alpha+\beta$ と α は互いに素である。なぜなら，もし公約数 g をもつとすると，$4\alpha+\beta=sg,\ \alpha=tg$ とおけて，$4tg+\beta=sg$ となるから β が約数 g をもつことになり，$\alpha,\ \beta$ が互いに素という仮定に反するからである。よって，a_k と a_{k+1} の最大公約数も 2 である。また，a_1 と a_2 の最大公約数も 2 である。以上から，数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して a_n と a_{n+1} の最大公約数は $\mathbf{2}$