理系第３問

複素数平面上の原点以外の点 z に対して，$w=\dfrac{1}{z}$ とする。

(1) α を 0 でない複素数とし，点 α と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線を L とする。点 z が直線 L 上を動くとき，点 w の軌跡は円から 1 点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。

(2) 1 の 3 乗根のうち，虚部が正であるものを β とする。点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くときの点 w の軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ。

(1) z は Oα の垂直二等分線上の点だから $|z|=|z-\alpha| \iff \left|\dfrac{1}{w}\right|^2=\left|\dfrac{1}{w}-\alpha\right|^2$

$$\iff \left(\frac{1}{w}\right)\overline{\left(\frac{1}{w}\right)}=\left(\frac{1}{w}-\alpha\right)\overline{\left(\frac{1}{w}-\alpha\right)}$$

両辺に $w\overline{w}$ をかけて $1=(1-\alpha w)\overline{(1-\alpha w)}$

両辺を $\alpha\overline{\alpha}$ で割って $\dfrac{1}{\alpha\overline{\alpha}}=\left(\dfrac{1}{\alpha}-w\right)\overline{\left(\dfrac{1}{\alpha}-w\right)}$

$$\iff \left|w-\frac{1}{\alpha}\right|^2=\left|\frac{1}{\alpha}\right|^2 \iff \left|w-\frac{1}{\alpha}\right|=\left|\frac{1}{\alpha}\right|$$

これは円を表し，$w \neq 0$ より原点は含まない。よって**中心 $\dfrac{1}{\alpha}$，半径 $\left|\dfrac{1}{\alpha}\right|$**

(2) 題意の線分は -1 と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線なので，(1) で $\alpha=-1$ とおくことにより，w の軌跡は $|w+1|=1$ ここで，$\dfrac{1}{2} \leqq |z| \leqq 1$ だから，

$$\frac{1}{2} \leqq \left|\frac{1}{w}\right| \leqq 1 \iff 1 \leqq |w| \leqq 2$$

よって求める軌跡は**円 $(x+1)^2+y^2=1$ の $x \leqq -\dfrac{1}{2}$ の部分**（図略）