理系第２問

座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則 (a)，(b) に従って動く点 P を考える。

(a) 最初に，点 P は原点 O にある。

(b) ある時刻で点 P が格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その 1 秒後の点 P の位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である。

(1) 点 P が，最初から 6 秒後に直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ。

(2) 点 P が，最初から 6 秒後に原点 O にある確率を求めよ。

(1) $\overrightarrow{e_1}=(1,\ 0)$，$\overrightarrow{e_2}=(0,\ 1)$，$\overrightarrow{e_3}=(-1,\ 0)$，$\overrightarrow{e_4}=(0,\ -1)$ とおくと，これらそれぞれの方向に動く回数を $a,\ b,\ c,\ d$ として，6 秒後の位置は

$$\overrightarrow{p}=a\overrightarrow{e_1}+b\overrightarrow{e_2}+c\overrightarrow{e_3}+d\overrightarrow{e_4}=(a-c,\ b-d)$$

と表せる。ここで，

$$\begin{cases} 0 \leqq a \leqq 6 & \cdots ① \\ 0 \leqq b \leqq 6 & \cdots ② \\ 0 \leqq c \leqq 6 & \cdots ③ \\ 0 \leqq d \leqq 6 & \cdots ④ \\ a+b+c+d=6 & \cdots ⑤ \end{cases}$$

6 秒後に $y=x$ 上にある条件は，$a-c=b-d \iff a+d=b+c$

これと⑤より $2(a+d)=6 \iff a+d=3$

①，④から，これを満たす $(a,\ d)$ は，$(a,\ d)=(0,\ 3)$，$(3,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$

同様に，$b+c=3$ を満たす $(b,\ c)$ は，$(b,\ c)=(0,\ 3)$，$(3,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$

よって $(a,\ b,\ c,\ d)$ のとり方は，16 通りあるが，それぞれについてベクトル $\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{e_4}$ を計 6 回取る方法が何通りあるかを調べる。

(i) $a,\ b,\ c,\ d$ がどれも 3 か 0 の場合

このような $a,\ b,\ c,\ d$ は 4 組あるが，それぞれについて，ベクトルの配置は ${}_6\mathrm{C}_3=20$ 通りある。

(ii) $a,\ b,\ c,\ d$ がどれも 2 か 1 の場合

このような $a,\ b,\ c,\ d$ は 4 組あるが，それぞれについて，ベクトルの配置は

${}_6\mathrm{C}_2 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_1 = 180$ 通りある。

(iii) a, b, c, d が 0，1，2，3 のすべてを含む場合

このような a, b, c, d は 8 組あるが，それぞれについて，ベクトルの配置は

${}_6\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_2 \times {}_1\mathrm{C}_1 = 60$ 通りある。

よって，ベクトルのとり方は全部で $4 \times 20 + 4 \times 180 + 8 \times 60 = 1280$ 通りある。

それぞれを取る確率は $\left(\dfrac{1}{4}\right)^6$ なので，求める確率は $\left(\dfrac{1}{4}\right)^6 \times 1280 = \boldsymbol{\dfrac{5}{16}}$

(2) 6 秒後に原点にある条件は，$a - c = b - d = 0 \iff a = c$ かつ $b = d$

これは, 上の考察から, $(a,\ d,\ b,\ c) = (0,\ 3,\ 3,\ 0),\ (3,\ 0,\ 0,\ 3),\ (1,\ 2,\ 2,\ 1),\ (2,\ 1,\ 1,\ 2)$ の場合だけである。よってベクトルを 6 回取るとり方は，上の (i)(ii) から

$2 \times 20 + 2 \times 180 = 400$ 通り。求める確率は $\left(\dfrac{1}{4}\right)^6 \times 400 = \boldsymbol{\dfrac{25}{256}}$