理系第１問

　実数 a, θ に対して

$$f(\theta)=\cos^3\theta+a\cos^2\theta+b\cos\theta$$

とし，$0<\theta<\pi$ で定義された関数

$$g(\theta)=\frac{f(\theta)-f(0)}{\cos\theta-1}$$

を考える。

(1) $f(\theta)$ と $g(\theta)$ を $x=\cos\theta$ の整式で表せ。

(2) $g(\theta)$ が $0<\theta<\pi$ の範囲で最小値 0 をとるための a, b についての条件を求めよ。
また，条件をみたす点 $(a,\ b)$ が描く図形を座標平面上に図示せよ。

(1) $f(\theta)=\left(4x^3-3x\right)+a\left(2x^2-1\right)+bx=\boldsymbol{4x^3+2ax^2+(b-3)x-a}$

$$g(\theta)=\frac{4x^3+2ax^2+(b-3)x-a}{x-1}=\boldsymbol{4x^2+2(a+2)x+(2a+b+1)}$$

(2) $g(\theta)=h(x)$ とおくと，$h(x)=4\left(x+\dfrac{a+2}{4}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+a+b\ (-1<x<1)$

(i) $-\dfrac{a+2}{4}\leqq-1\iff a\geqq2$ のとき

$x=-1$ をとることができないので最小値は存在しない。

(ii) $-1<-\dfrac{a+2}{4}<1\iff -6<a<2$ のとき

最小値は $h\left(-\dfrac{a+2}{4}\right)=-\dfrac{a^2}{4}+a+b=0$ より，$b=\dfrac{1}{4}(a-2)^2-1$

(iii) $1\leqq-\dfrac{a^2}{4}\iff a\leqq-6$ のとき，

$x=1$ をとることができないので最小値は存在しない。

以上から求める条件は

$\boldsymbol{-6\leqq a<2}$ **かつ** $\boldsymbol{b=\dfrac{1}{4}(a-2)^2-1}$（図略）