

文系第4問

$p = 2 + \sqrt{5}$ とおき、自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める。以下の問いに答えよ。ただし設問(1)は結論のみを書けばよい。

- (1) a_1, a_2 の値を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ とする。積 $a_1 a_2$ を、 a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。
- (3) a_n は自然数であることを示せ。
- (4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

(1) $p = \sqrt{5} + 2, \frac{1}{p} = \sqrt{5} - 2$ なので、

$$a_1 = (\sqrt{5} + 2) - (\sqrt{5} - 2) = 4, a_2 = (\sqrt{5} + 2)^2 + (\sqrt{5} - 2)^2 = 18$$

(2) $a_1 a_n = \left(p - \frac{1}{p}\right) \left\{ p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n \right\}$

$$= p^{n+1} - p^{n-1} + \left(-\frac{1}{p}\right) \left(\frac{1}{p}\right)^n + p \left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

$$= p^{n+1} - p^{n-1} + \left(-\frac{1}{p}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{p}\right)^{-1} \left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

$$= p^{n+1} - p^{n-1} + \left(-\frac{1}{p}\right)^{n+1} - \left(-\frac{1}{p}\right)^{n-1}$$

$$= a_{n+1} - a_{n-1}$$

(3) (2) より $a_{n+1} = a_1 a_n + a_{n-1} \cdots \textcircled{1}$

ここで、自然数 $k (\geq 2)$ に対して a_k, a_{k-1} がともに自然数であると仮定すると、 a_1 が自然数なので、 $\textcircled{1}$ から、 a_{k+1} も自然数となる。

a_1, a_2 が自然数であることはわかっているので、数学的帰納法により、すべての自然数 n で a_n は自然数となる。(証明終)

- (4) a_k と a_{k-1} ($k \geq 2$) が最大公約数 2 をもつと仮定して、 $a_k = 2\alpha, a_{k-1} = 2\beta$ (α, β は互いに素) とおく。このとき $\textcircled{1}$ より $a_{k+1} = 2(4\alpha + \beta)$ 、これと $a_k = 2\alpha$ を比べると、 $4\alpha + \beta$ と α は互いに素である。なぜなら、もし公約数 g をもつとすると、 $4\alpha + \beta = sg, \alpha = tg$ とおけて、 $4tg + \beta = sg$ となるから β が約数 g をもつことになり、 α, β が互いに素という仮定に反するからである。よって、 a_k と a_{k+1} の最大公約数も 2 である。また、 a_1 と a_2 の最大公約数も 2 である。以上から、数学的帰納法により、すべての自然数 n に対して a_n と a_{n+1} の最大公約数は **2**