

文系第1問

座標平面において2つの放物線  $A: y = s(x-1)^2$  と  $B: y = -x^2 + t^2$  を考える。ただし  $s, t$  は実数で、 $0 < s, 0 < t < 1$  をみたすとする。放物線  $A$  と  $x$  軸および  $y$  軸で囲まれる領域の面積を  $P$  とし、放物線  $B$  の  $x \geq 0$  の部分と  $x$  軸および  $y$  軸で囲まれる領域の面積を  $Q$  とする。 $A$  と  $B$  がただ1点を共有するとき、 $\frac{Q}{P}$  の最大値を求めよ。

$$s(x-1)^2 = -x^2 + t^2 \iff (s+1)x^2 - 2sx + (s-t^2) = 0$$

$$\text{この式で } D/4 = 0 \text{ とおいて } s = \frac{t^2}{1-t^2} \dots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } P = \int_0^1 s(x-1)^2 dx = \frac{s}{3}, Q = \int_0^t (-x^2 + t^2) dx = \frac{2}{3}t^3$$

$$\therefore \frac{Q}{P} = \frac{2t^3}{s}, \textcircled{1} \text{ を用いて } \frac{Q}{P} = 2t(1-t^2)$$

$$\text{これを } f(t) \text{ として, } f'(t) = 2(1-3t^2)$$

$$\text{増減表 (略) より, } t = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ のとき最大値 } \frac{4\sqrt{3}}{9}$$